

# 线性代数课程、教材、数字教材建设和教学方法变革

电子科技大学 黄廷祝

2024年12月

## 内容

- 1. 历史变迁、时代变化**
2. 新时代，对课程教学的再思考
3. 一些教学实践

# 1. 历史变迁、时代变化

- 精品课
- 精品资源共享课
- 精品视频公开课
- 精品在线开放课（线上类一流课）
- **生成式人工智能的到来**

## 内容

1. 历史变迁、时代变化
- 2. 新时代，对课程教学的再思考**
3. 一些教学实践

## 2. 新时代，对课程教学的再思考

AI迅猛发展，其强大超过想象  
铺天盖地的文章、会议、讨论、培训、.....

“挑战”

“替代”

“变革”

### 个人观点交流：

#### (1) 拥抱AI

赋能、辅助、为我们所用

实际上，对于在座的，中青年教师为主，.....

但是，个人认为还不够，会逐渐产生形态变革，甚至或将.....

## (2) 应该围绕什么？

关于文章、讨论中不断谈到的“挑战” “替代” .....

### “挑战” 是否在于：

- 是否应该积极变革教学方法？怎么变？
- 是否是“好的教学”？“真正好的教学”？
- 是否在这个老师那里才能学到：  
看书、AI问答、看AI解答、看“资源”、…，学不到的东西？
- 是否在这个老师那里真有收获？
- 上这个老师的课，对于思维培养、……？
- 这个老师的课的**吸引力**？

### (3) 培养创新人才的课程教学

应该着重培养什么？应该着重教什么？  
应该怎么教？  
学生应该学什么？学到手什么？  
应该怎么学？

今天最想与老师们交流的思想观念观点和实践

虽然“教无定法”

但是，围绕好的教学思想、好的教学理念，并**实现它的教法就是“好的教学”**  
——**不可替代的教学**

思想  
理念



怎么教

思想  
理念

## 培养创新人才

- .....
- .....
- 创新思维能力（批判性思维能力 独立思考思维能力）
- .....

（特别地，线性代数/高等代数：抽象思维能力、.....）

思维习惯 → 自然习惯

独立思考 → 主动学习 → 终身学习习惯与思维能力

**首先，打牢理解、深刻理解的根基**



**围绕创新人才的核心素质、思维能力的培养来教学**  
**形成自己独有风格的教学**  
——不被“替代”？

**关于“AI技术赋能”** (这里仅略谈一点)

**值得思考：是否更应该围绕上述思想理念来赋能？**

## 内容

1. 历史变迁、时代变化
2. 新时代，对课程教学的再思考
- 3. 一些教学实践**

“线性代数”课程可以这样学

(1) 有趣、好奇、兴趣

(2) 培养研究性的思维**习惯**和能力

知识很重要，但是知识是第二位的。  
数学的精神、思想、方法是第一位的。  
如果我们.....

### (3) **教材**建设与课程**教学**一体化

- 易于学生**深刻理解概念、知识**
- 易于学生掌握不同知识、不同概念之间的**逻辑关联与本质联系**
- 易于学生掌握**内容体系**
- 易于学生基本上**学明白**

**教材支撑课程，教材对于课堂教学的巨大作用**

## 1. 内容体系，使得学生：

**易于学生**理解数学概念

**易于**深刻理解掌握内容体系  
逻辑关系  
来龙去脉

**易于**学生基本上学明白

## 2. 唤起好奇 激发兴趣

基础课与有趣的科技前沿问题接轨

## 3. 融入教材：丰富的教学资源

## 4. 教学方法：过程

## 5. 资源的运用

# 教材的总体设计

## 线性代数的概念、理论体系和方法极具魅力

- 抽象性、理论性
- 概念性特别强，概念的深入理解要求高
- 不同知识点的内容和概念之间联系特别紧密

学生难以深刻理解；概念易混淆；学生难以串起来



## 教材内容体系改革创新

→ 易于学生深刻理解和掌握

## 新工科背景下

人工智能、数据科学、5G通讯和区块链等  
前沿科技领域中数学问题的不断涌现

## 线性代数的基础地位更加凸显

不断得到新的阐释和应用

成为人工智能、大数据技术、智能芯片  
等新工科前沿科技的基础



## 教材内容及形式改革创新

→ 适应、反映时代的发展、科技的发展

## 全新的融入教材的教学资源



## 新形态教材

(“卡脖子”技术)



引入国产软件 “北太天元”

# 教材的建设历程及总体设计

数学类专业《高等代数》，内容体系、结构、新形态

黄廷祝主编，何军华、李永彬编

高等教育出版社

第1版，2012

第2版，2016（“十二五”国家级规划教材）

第3版，2024

二等奖，2021

第4版（“十二五”国家级规划教材，2015年）

第5版（2019）——新形态教材

第6版（2022）——新形态教材

教材内容体系优势特色 + 融入新工科前沿（正文+教学资源）+ 拓展与创新实践

徐宗本院士总主编

黄廷祝主编

“新时代大学数学系列教材”

《线性代数》，新形态教材

第1版，2021；第2版，2024

《线性代数与空间解析几何（第6版）》

新形态教材

高等教育出版社，2022.1

## 教材内容体系的创新与特色

### 线性代数

行列式

矩阵

向量

线性方程组

特征值与特征向量

二次型

线性空间与线性变换



矩阵及其初等变换 (线性方程组在这里)

行列式

$n$ 维向量空间

特征值与特征向量

二次型

线性空间与线性变换

# 线性代数与人工智能、大数据技术等前沿新工科内容的融合

融入了一系列前沿科技内容，以及对应的数字教学资源

- 图像处理
- 电影推荐
- Google搜索引擎
- GPS卫星定位

等

## 纸质教材

- 前导案例（**新工科前沿特征**，每章开始）
- 正文内容融入
- 例题融入
- 习题融入
- 研究型思考题
- **5个应用案例**  
(与“前导案例”呼应，**新工科前沿特征**，每章结尾)

**应用案例配套资源：**精选几个代表性的应用案例

- 能理解
  - 配有代码
  - 学生可以**动手操作**
- 真正体会线性代数的应用

- 应用案例背景
- 详细建模过程
- 数学问题描述
- 求解算法
- **代码**

让学生**一步就可接触到**前沿科技实际问题**并学会应用**

## 融入纸质教材中的数字教学资源

- “前沿视角”视频（每章开始）
- 重要概念解析视频
- 典型例题解析视频
- 知识点注释
- 自测题
- 习题答案
- 有趣的新工科扩展阅读内容
- 配套的《线性代数与信息科技》国家精品视频公开课

## 内容体系结构和若干关键问题处理

### 1. 唤起好奇 激发兴趣

基础课与有趣的科技前沿问题接轨

### 2. 内容体系先进性, 使得学生:

易于深刻理解数学概念

易于深刻理解掌握内容体系

逻辑关系

来龙去脉

### 3. 可供学生创新实践拓展

**举例: 突出数学研究思想, 反映内容背后的逐步递进研究思维与过程, 让抽象难懂的概念随时呼之欲出、自然、符合认知规律。**

如:

从1.1节建立矩阵概念、线性运算, 到 $R^n$ , 有意识地按线性空间八条公理形式表述, 最后抽象线性空间。从特殊到一般进行铺垫, 使“抽象难懂”变得简单, 体现了数学研究思想。

.....

.....

.....

# 内容体系结构和若干关键问题处理

将一系列通常被割裂开分别讲的内容融合，轻松建立起等价命题，避免内容重复，论证更简单和简洁

**例：在第一章就仅用不到一页的篇幅**将方阵可逆与齐次方程组只有零解、非齐次方程组有唯一解、矩阵等价于单位阵、可表为有限个初等阵的乘积等的等价关系非常容易建立起来。

系列等价关系往往零散分布于多处，学生很难清晰串起来深刻理解。

**例**

**定理** 设 $A$ 为 $n$ 阶矩阵，则下列命题等价：

- (1)  $A$ 是可逆的；
- (2) 齐次线性方程组 $AX=0$ 只有零解；
- (3) 非齐次线性方程组 $AX=b$ 有惟一解；
- (4)  $A$ 与 $I$ 行等价；
- (5)  $A$ 可表为有限个初等矩阵的乘积。

定理 3 设  $A$  为  $n$  阶矩阵，则下列各命题是等价的：

- 1°  $A$  是可逆的；
- 2° 齐次线性方程组  $AX = 0$  只有零解；
- 3°  $A$  与  $I$  行等价；
- 4°  $A$  可表示为有限个初等矩阵的乘积。

证 1°  $\Rightarrow$  2° 设  $A$  是可逆的且  $X$  是  $AX = 0$  的解，则

$$X = IX = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}0 = 0,$$

因此， $AX = 0$  只有零解。

2°  $\Rightarrow$  3° 若齐次线性方程组  $AX = 0$  只有零解，设

$A \xrightarrow{\text{行初等变换}} B$  ( $B$  为行阶梯形矩阵)，

则  $AX = 0$  与  $BX = 0$  同解。若  $B$  有一对角元为零，则  $B$  的最后一行元全为零，这样  $AX = 0$  同解于未知量个数多于方程个数的线性方程组。于是  $AX = 0$  有非零解，这与已知矛盾。因而行阶梯形矩阵  $B$  的对角元全为非零，从而  $A$  经过行初等变换可化为的简化行阶梯形矩阵是  $I$ ，即  $A$  与  $I$  行等价。

3°  $\Rightarrow$  4° 因为  $A$  与  $I$  行等价，所以  $A$  经过行初等变换可以得到  $I$ 。又因对  $A$  施以行初等变换相当于用初等矩阵左乘  $A$ ，从而存在初等矩阵  $P_1, P_2, \dots, P_k$ ，使得  $P_k \cdots P_2 P_1 A = I$ ，又因初等矩阵可逆，故  $A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_k^{-1}$ ，而初等矩阵的逆矩阵仍为初等矩阵，因此  $A$  可表示为有限个初等矩阵的乘积。

4°  $\Rightarrow$  1° 设存在初等矩阵  $E_1, E_2, \dots, E_k$ ，使得  $A = E_1 E_2 \cdots E_k$ ，由初等矩阵可逆及定理 2 中 3° 的推广知  $E_1 E_2 \cdots E_k$  也可逆，故  $A$  可逆。

推论 设  $A$  为  $n$  阶矩阵，则非齐次线性方程组  $AX = b$  有唯一解的充要条件是  $A$  可逆。

证 充分性：若  $A$  可逆，则  $AX = b$  有唯一解  $X = A^{-1}b$ 。

必要性：设  $AX = b$  有唯一解  $X$ ，但  $A$  不可逆，则  $AX = 0$  有非零解  $Z \neq 0$ 。令  $Y = X + Z$ ，易知， $Y \neq X$  且  $AY = A(X + Z) = AX + AZ = b + 0 = b$ ，即  $Y$  也为  $AX = b$  的解，矛盾。故  $A$  可逆。

对于逆矩阵定义中的  $AB = I$ ， $BA = I$ ，是否两个都须同时满足呢？实际上只需满足其中一个即可，请见如下定理：

定理 4 设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵，若  $BA = I$  (或  $AB = I$ )，则  $A, B$  都可逆， $A, B$  互为逆矩阵，且  $AB = I$  (或  $BA = I$ )。

# 内容体系结构和若干关键问题处理

## 充分揭示内容之间的内在联系且内容变得简洁易懂

将：

- 向量组相关性理论
- 线性方程组理论
- 矩阵与行列式理论

融合, **建立等价命题。**

**内在关系揭示得更深刻、明确、清晰, 证明简单简洁。**

通常, 这些结论被零散地、一个个地分布在教材的多处章节  
——学生学习线性代数最感头痛的地方, 无法清晰地前后串起来

## 内容体系结构和若干关键问题处理

**例** 揭示非齐次方程组与线性组合、秩的关系：

**定理** 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , 则下列命题等价：

- (1)  $b \in L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ;
- (2)  $AX = b$  有解;
- (3)  $R(\bar{A}) = R(A)$ .

## 内容体系结构和若干关键问题处理

**例** 揭示齐次方程组与线性相关性、秩的关系：

**定理** 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , 则下列命题等价：

- (1)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关；
- (2)  $AX = 0$  有非零解；
- (3)  $R(A) < n$ .

# 内容体系结构和若干关键问题处理

## 例 用逆矩阵处理克拉默法则

事实上，充要条件早在1.3节就建立，这里只需解的表达式

**证明非常简单**

**证** 解的唯一性（显然）

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A_1 \\ \vdots \\ \det A_n \end{pmatrix}$$

为什么？



返回

# 内容体系结构和若干关键问题处理

## 例 变得很容易证明

**性质5** 设 $A$ 为 $n$ 阶矩阵, 则

$$\det(A^T) = \det A.$$

**证** 当 $A$ 不可逆时: 设

$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} R$  (最后一行的元全为零)

即存在初等矩阵  $E_1, E_2, \dots, E_t$ ,

$$A = E_1 E_2 \cdots E_t R$$

$$\det R = 0 \Rightarrow \det A = (\det E_1) \cdots (\det E_t) (\det R) = 0.$$

又 $A$ 不可逆 $\Leftrightarrow A^T$ 不可逆

所以  $\det A^T = 0$

**当 $A$ 可逆时:** 存在初等矩阵  $E_1, E_2, \dots, E_s$ ,

$$A = E_1 E_2 \cdots E_s$$

$$\begin{aligned} \det(A^T) &= \det(E_s^T \cdots E_2^T E_1^T) \\ &= (\det E_s^T) \cdots (\det E_2^T) (\det E_1^T) \\ &= (\det E_s) \cdots (\det E_2) (\det E_1) \\ &= \det(E_1 E_2 \cdots E_s) \\ &= \det A \end{aligned}$$

## 内容体系结构和若干关键问题处理

**例** 很容易地建立起：

**定理2** 设 $A, B$ 为 $n$ 阶方阵，则

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

**证** 设 $A \xrightarrow{\text{行初等变换}} R$ （简化行阶梯形）

即存在初等矩阵  $E_1, \dots, E_t$  使得  $A = E_1 \cdots E_t R$

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1 \cdots E_t RB) \\ &= (\det E_1) \cdots (\det E_t)(\det(RB)).\end{aligned}$$

若 $A$ 可逆，则 $R=I$ ,

$$\det(AB) = (\det E_1) \cdots (\det E_t)(\det(IB)) = (\det A)(\det B).$$

若 $A$ 不可逆，则 $R$ 的最后一行全为零， $RB$ 的最后一行全为零.

$$\det(AB) = 0$$

$$(\det A)(\det B) = 0(\det B) = 0.$$



## 内容体系结构和若干关键问题处理

**例** 在新体系下，如下较难建立的关系也只需几行的篇幅建立起来：

**定理** 矩阵的行秩等于列秩，也等于矩阵的秩。

教材内容体系优势特色



数学类专业《高等代数》  
内容体系、结构、新形态

## 教学过程中巧妙使用，发挥大作用

(好奇、什么用、对课程和教材内容之外不被大家了解的深刻得多的认识、大开眼界)

国家精品视频公开课 “**线性代数与信息科技**” (黄廷祝)

第一学期 线性代数

信息科技前沿

- 线性方程组与隐身飞机设计、手机电磁辐射评估
- 矩阵运算与人脸识别
- 线性代数在智能机器研制中的应用
- 搜索引擎Google的秘密
- 数字图像处理中的线性代数



又如：融入教材每章开头的数字资源 “**前沿视角**”

# 例

## 第一章 矩阵及初等变换

### 1.0 引例：数据的矩阵表示与处理

## 第 1 章 矩阵及其初等变换

在自然科学和工程技术中有大量的问题与矩阵这一数学概念有关, 并且这些问题的研究常常反映为对矩阵的研究. 甚至有些表面上完全没有联系的、性质完全不同的问题, 归结成矩阵问题以后却是相同的. 这就使矩阵成为数学中一个极其重要的、应用广泛的工具, 因而也就成为代数特别是线性代数的一个主要研究对象, 尤其是随着计算机的广泛应用, 矩阵知识已成为现代科技人员必备的数学基础.

本章主要介绍矩阵的运算、解线性方程组的高斯消元法与矩阵的初等变换、逆矩阵和分块矩阵.

### 1.0 引例

大数据时代, 形式千变万化的数据 (文本、图像和视频等) 爆发式增长. 如何简洁且统一地表示形式千变万化的数据是数据科学的基础问题之一. 例如, 在图 1.1 中, 如何用数学语言表示灰度图像? 本章将要学习的矩阵概念可以帮助我们表示这个纷繁复杂的世界.



前沿视角

矩阵与矩阵运算

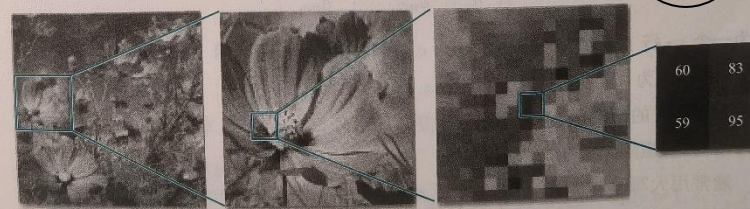


图 1.1

9. 已知  $\alpha = (1, 2, 3), \beta = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ , 且  $A = \alpha^T \beta$ , 计算  $A^n$ .

10. 举反例说明下列命题是错误的:

(1) 若  $A^2 = O$ , 则  $A = O$ ;

(2) 若  $A^2 = A$ , 则  $A = O$  或  $A = I$ ;

(3) 若  $AX = AY$ , 且  $A \neq O$ , 则  $X = Y$ .

11. 如果  $A$  是实对称矩阵, 且  $A^2 = O$ , 证明  $A = O$ .

12. 设  $A = \frac{1}{2}(B + I)$ , 证明  $A^2 = A$  当且仅当  $B^2 = I$ .

13. 设  $X$  是  $n \times 1$  矩阵, 且  $X^T X = 1$ , 证明  $S = I - 2XX^T$  是对称矩阵, 且  $S^2 = I$ .

14. 利用等式

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

计算  $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5$ .

15. 求平方等于零矩阵的所有二阶矩阵.

## 1.2 高斯消元法与矩阵的初等变换

在中学代数里, 研究的中心问题之一是解方程, 而其中最简单的便是线性 (一次) 方程及方程组. 解线性方程组之所以重要, 是因为一个复杂的实际问题往往可以简化或归结为一个线性方程组.

线性方程组在数学的许多分支 (如微分方程、概率统计、计算方法) 以及其他学科领域 (如物理学、经济学、工程技术) 中都有着广泛的应用.

实际问题提出的线性方程组往往是很复杂的, 未知量的个数和方程的个数都很多. 例如, 水坝设计可以提出含有几十个, 甚至几百个未知量和方程的线性方程组, 数学物理问题中常常要求解含有上万个甚至更多未知量的方程组, 而且未知量的个数与



前沿视角

线性代数方程组  
求解与计算机  
辅助工程(CAE)

## 丰富的配套资源

### 前沿视角视频

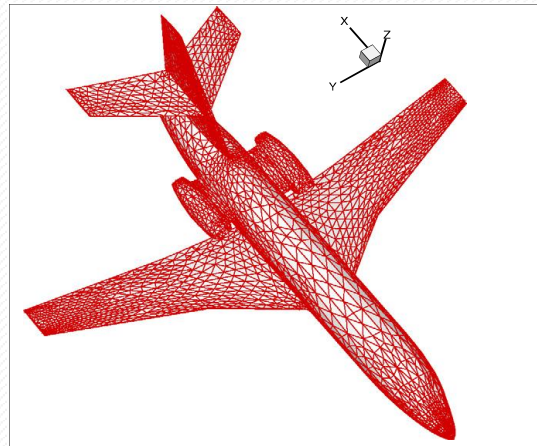
- 矩阵和矩阵运算
- 线性方程组求解与CAE
- 矩阵秩和推荐系统
- 特征值与特征向量

### 前沿应用案例资源

- 主成分分析
- 反卷积
- 线性回归
- Google搜索引擎的秘密
- 线性方程组-图像编辑修改

### 重要概念解析视频

### 典型例题精讲视频



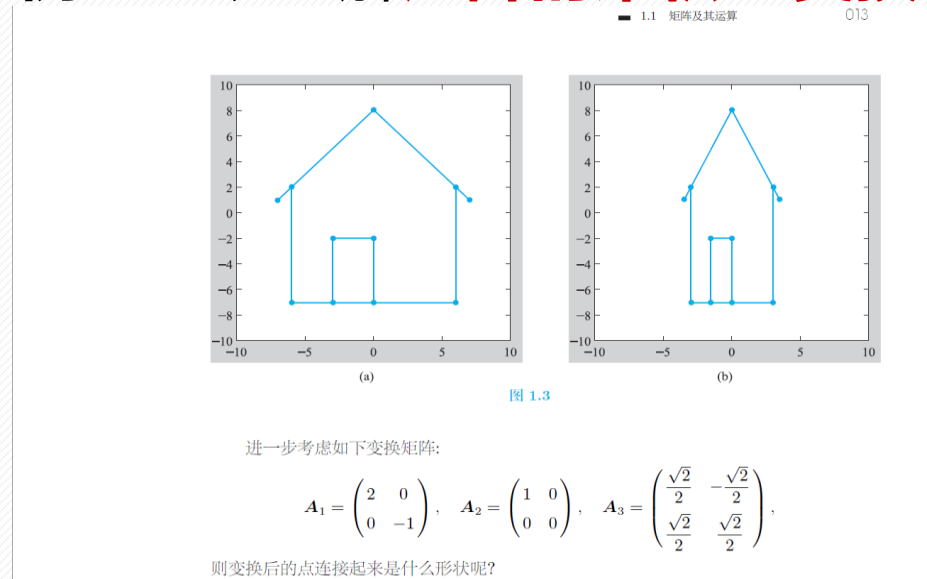
## 正文内容融入



## 例：矩阵加法直观理解



## 例：直观理解矩阵的乘积—变换



## 应用实例举例—神经网络

### 应用实例二：神经网络

深度神经网络是人工智能的重要研究方向之一. 神经元是构成神经网络的基本单元, 用以模拟生物神经元特性, 接收一组输入信号并产出输出. 如图 1.4 所示,  $a_j^{l-1}$  是第  $l-1$  层第  $j$  个神经元的输出,  $a_i^l$  是第  $l$  层神经元第  $i$  个神经元的输入,  $w_{ij}^l$  是第  $l-1$  层第  $j$  个神经元到第  $l$  层第  $i$  个神经元的连接权重.

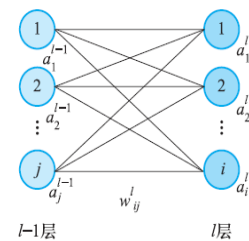
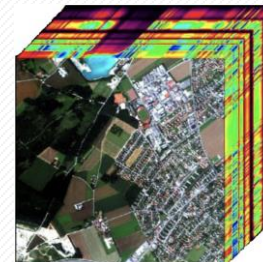
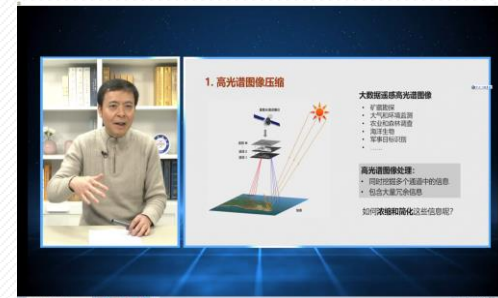
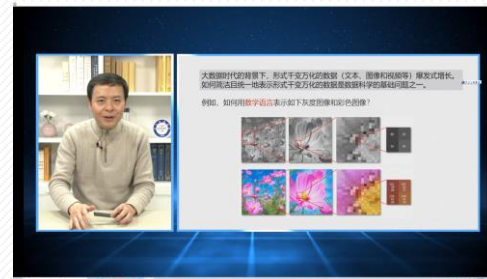
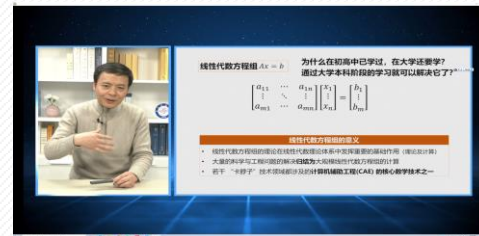


图 1.4

# 前沿视角视频



## 前沿应用案例



前沿应用案例: 反卷积 (线性方程组求解)



前沿应用案例: 图像编辑修改 (线性方程组求解)



前沿应用案例: 搜索引擎的秘密 (特征值与特征向量)

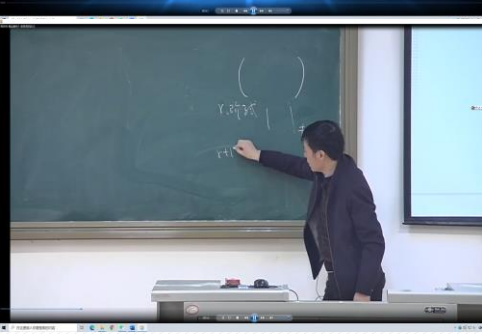
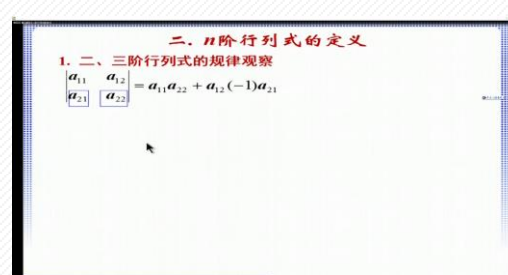


前沿应用案例: 主成分分析 (特征值与特征向量)



前沿应用案例: 房价预测 (最小二乘法)

# 重要概念解析视频



## ■ 自测题一



## 第一章 矩阵及其初等变换

在自然科学和工程技术中有大量的问题与矩阵这一数学概念有关, 并且这些问题的研究常常反映为对矩阵的研究. 甚至有些表面上完全没有联系的、性质完全不同的问题, 归结成矩阵问题以后却是相同的. 这就使矩阵成为数学中一个极其重要的、应用广泛的工具, 因而也就成为代数、特别是线性代数的一个主要研究对象, 尤其是随着计算机的广泛应用, 矩阵知识已成为现代科技人员必备的数学基础.

本章主要介绍矩阵的运算、解线性方程组的高斯消元法与矩阵的初等变换、逆矩阵和分块矩阵.

### 1.0 引例

大数据时代, 形式千变万化的数据 (文本、图像和视频等) 爆发式增长. 如何简洁且统一地表示形式千变万化的数据是数据科学的基础问题之一. 例如, 在图 1.1 中, 如何用数学语言表示灰度图像? 本章将要学习的矩阵概念可以帮助我们表示这个纷繁复杂的世界.



前沿视角

线性代数方程组  
求解与计算机  
辅助工程 (CAE)



图 1.1

## (4) 再谈 “激发兴趣”

从教材的第一页开始:  
与人工智能与信息科技前沿接轨

- 前导案例 (新工科前沿, 每章开始)

## (4) 再谈“激发兴趣” (续)

新生感受到数学基础课知识的强大作用  
学的东西的强大应用

**从新生第一节课开始：与人工智能与信息科技前沿接轨**  
**新生入学，就为新生搭建跨越数学基础课与前沿科技鸿沟的桥梁**

**课堂教学过程中若干次联想、关联与巧妙运用，发挥大作用**

(好奇、什么用、对课程和教材内容之外不被大家了解的深刻得多的认识、大开眼界)

国家精品视频公开课 **“线性代数与信息科技”** (黄廷祝)

第一学期 线性代数

信息科技前沿

- 线性方程组与隐身飞机设计、手机电磁辐射评估
- 矩阵运算与人脸识别
- 线性代数在智能机器研制中的应用
- 搜索引擎Google的秘密
- 数字图像处理中的线性代数

中国大学视频公开课-推荐课程

推荐课程

|                                                                                                      |                                                                                                      |                                                                                                           |                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <br>玉雕与玉器<br>郭颖 | <br>马克思评传<br>韩源 | <br>线性代数与信息科技<br>黄廷祝 | <br>宝石鉴定与欣赏<br>李耿 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## 另：一系列问题

问题：为什么...?

问题：那就是很重要，那为什么...?

问题：大规模？为什么？

问题：克莱姆法则，...?

.....

# 课程平台AI升级版（智慧课程）：中国大学MOOC

利用人工智能技术，提供**高效、个性的教学服务**：

**AI助教智能问答、AI辅助、课程知识图谱，学习提效、个性化学习**



智慧课程

认证学习

国家精品

## 线性代数与空间解析几何（一）

第18次开课 ▾

开课时间：2024年08月26日 ~ 2024年12月10日

学时安排：3-5小时每周

进行至第13周，共16周

已参加，进入学习

注:当前学期存在已过期的测验，过期部分将无法计入学期总成绩。

**智慧课程** 利用人工智能技术，为你提供高效、个性的学习服务

📁 课程知识图谱

🗨️ AI助教智能问答

🔍 AI辅助课程学习提效

🔗 个性化学习

📄 认证成绩和证书

## 中国大学MOOC 智能教学2.0平台

内测版

问题反馈



老师您好，欢迎来到您的智能教学平台。我是您的人工智能教学助手小M，我可以在以下几个环节帮助您更好地完成教学。目前我还在进化中，会陆续开放更多的能力来帮助您，记得持续关注我哦！



### AI教学设计

AI定制课程知识图谱

AI辅助教学大纲设计  
(建设中)

AI辅助教案设计  
(建设中)

AI辅助PPT设计  
(建设中)



### AI辅助建课

AI智能建课  
(建设中)

AI生成数字人授课视频  
(建设中)



### AI个性化助教

定制课程AI助教



### AI工具箱

文档翻译

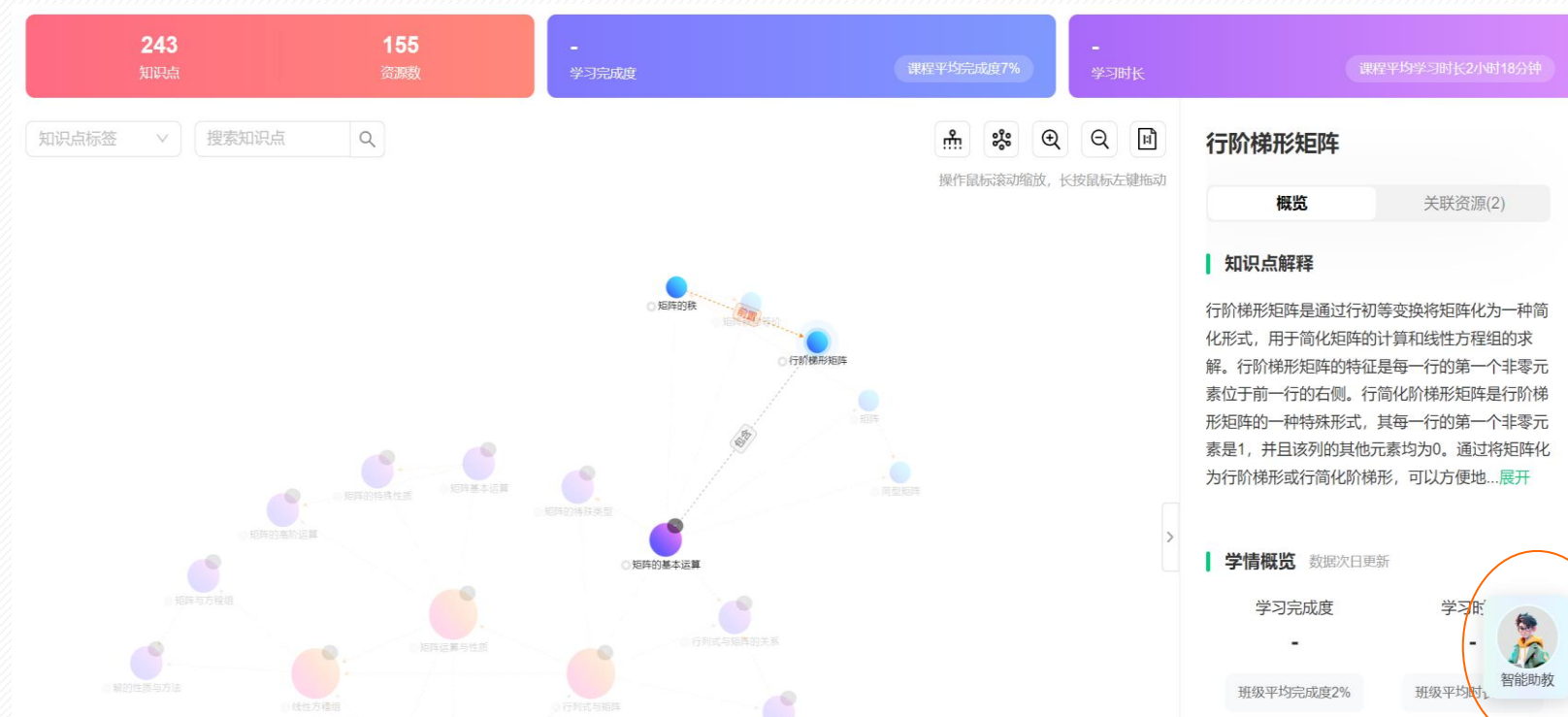
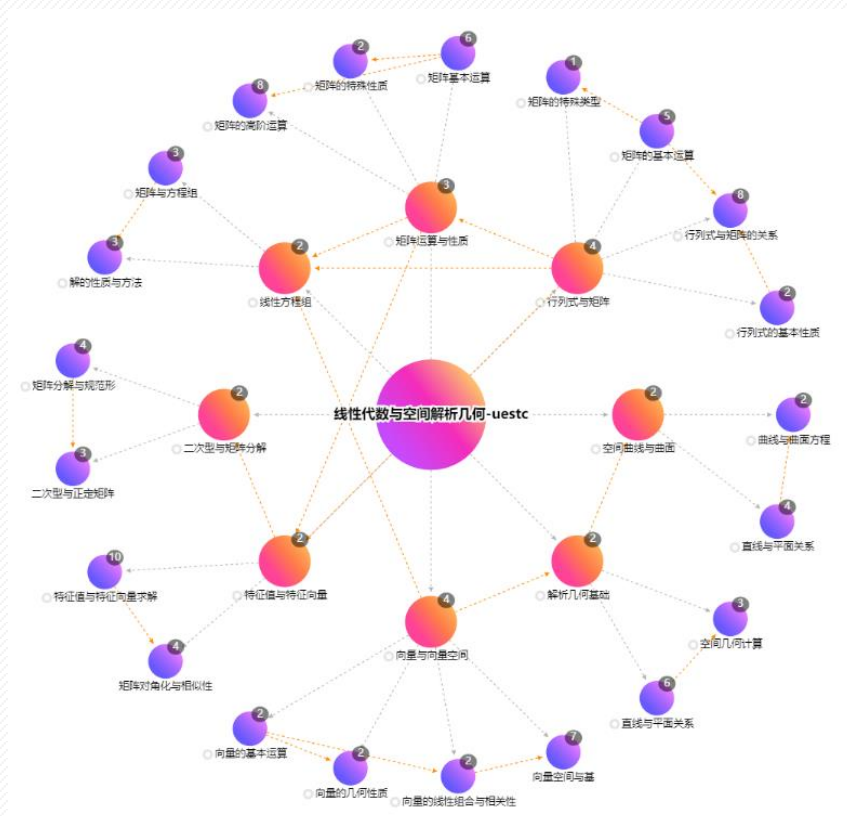
论文速读  
(建设中)

文档问答

课件题目OCR上传

AI教学助手  
(建设中)

# 课程知识图谱：243个知识点、327个教学资源、411个知识关系



# AI助教智能问答



## 矩阵秩的常见计算方法



常见的矩阵秩的计算方法主要有以下几种：

利用定义计算：通过判断矩阵中非零子式的最高阶数来确定矩阵的秩，但这种方法通常比较繁琐。

观察矩阵是否为行阶梯形矩阵：对于行阶梯形矩阵，其秩就是非零行的行数。通过将矩阵化为行阶梯形，可以较为直观地得出矩阵的秩。在实际计算中，通常会先尝试将矩阵化为行阶梯形来确定其秩。您在计算矩阵秩时是不是遇到了一些问题呢？

信息来源：

课件

线性代数与空间解析几何（一）-第五周 克拉默法则、矩阵的秩及第二章习题课:2-5.1（矩阵秩的概念） P1 P2

视频

线性代数与空间解析几何CAP-第三周 克拉默法则、矩阵的秩及空间直角坐标系:2-5.1（矩阵秩的概念） 00:06:44 - 00:08:53

视频

线性代数与空间解析几何（一）-第五周 克拉默法则、矩阵的秩及第二章习题课:2-5.3（矩阵秩的计算） 00:00:09 - 00:02:32

视频

线性代数与空间解析几何CAP-第三周 克拉默法则、矩阵的秩及空

PC端



认证成绩和证书



智能问答和解析

AI助教 线性代数与空间解析几何（一）

免费试用19次，开课后认证学习服务享无限次问答



我是你的智能课程助教，我可以为你回答课程知识相关的问题。

计算矩阵逆的方法

11/01 20:00



计算矩阵逆有以下方法：

一、利用可逆的充要条件（当矩阵可表示为有限个初等矩阵的乘积时）

1.原理

- 若矩阵  $A$  可逆， $A$  可以表示成有限个初等矩阵的乘积，或者说  $A$  行等价于单位矩阵  $I$ （只用行初等变换变成  $I$ ），即存在初等矩阵  $E_1, E_2, \dots, E_k$ ，使得  $E_k E_{k-1} \dots E_1 A = I$ 。
- 因为  $A$  乘以它的逆等于  $I$ ，所以  $A^{-1} = E_k E_{k-1} \dots E_1$ 。

知识答疑

你可以向我提问



手机APP

# 专有生成式大模型：嵌入课程平台和数字教材

## 专门化特色语料训练，回答精准、契合教材与课程

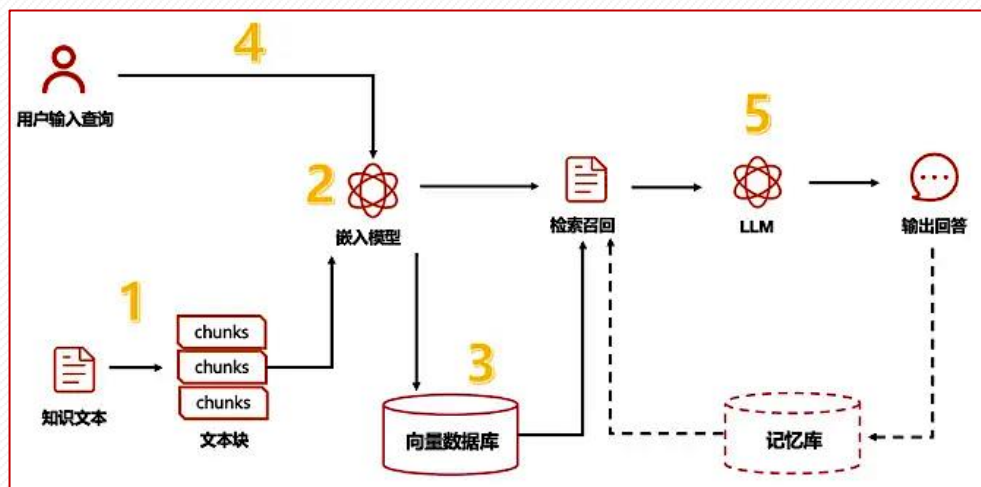
### ChatGPT等生成式人工智能局限性

- ◆ 产生幻觉
- ◆ 缺乏对生成文本的可解释性
- ◆ 专业领域知识理解差、对私域知识了解有限
- ◆ 回答内容的来源原因，容易使**学生不知所云**，甚至老师也可能不能给学生回答的正确性予以解释，**将影响学生学习兴趣**

### 技术方案：线性代数大模型RAG

- ◆ RAG搜索提问**最相关的知识或历史对话**
- ◆ 结合原始提问创造丰富Prompt
- ◆ **生成准确输出**

## 平台赋能：高等教育出版社与作者合建线性代数大模型RAG系统



- RAG可5个基本流程：知识文档的准备、嵌入模型嵌入模型 (embedding model)、向量数据库、查询检索、生产回答

- **在前期优质资源的基础上，构建私域语料库 (专有问答对)**

# 专有生成式大模型：嵌入课程平台和数字教材

## 专门化特色语料训练，回答精准、契合教材与课程

李良

线性空间是什么？

小w

线性空间，也称为向量空间，是由一个集合 $V$ 和一个数域 $P$ （如实数域或复数域）组成，其中 $V$ 上的元素称为向量， $P$ 上的元素称为标量。线性空间需要满足以下条件：对于 $V$ 中的任意两个向量 $\alpha$ 和 $\beta$ ，以及 $P$ 中的任意标量 $c$ ， $V$ 需要支持两种运算：向量加法（ $\alpha+\beta$ ）和标量乘法（ $c\alpha$ ）。这些运算需要满足八条线性规则，包括但不限于加法的交换律、结合律，标量乘法的分配律等。如果所有的验证都成功，那么 $V$ 就是数域 $P$ 上的线性空间。实数域上的线性空间称为实线性空间，复数域上的线性空间称为复线性空间。

李良

矩阵有什么用？

小w

矩阵在数学和工程学中有着广泛的应用，主要用于表示和解决线性方程组、进行数据变换和分析、以及在计算机图形学、机器学习、物理学等领域中进行复杂系统的建模。矩阵运算如逆矩阵、行列式、矩阵乘法等，为求解线性方程组、矩阵分解和数据分析提供了基础。此外，矩阵合同关系可用于刻画二次型之间的关系，而分块矩阵则有助于简化大规模数据的处理和复杂系统的建模。

## 专有大模型回答具有明显的准确性、明确性、简洁性

李良

什么是线性代数？

小w

线性代数是一门数学学科，主要研究线性空间与线性变换。它探讨向量及其线性相关性、向量组的极大无关组与秩等概念，并将这些概念推广到更广泛的意义下讨论向量及有关性质。线性代数的核心在于研究线性空间中的元素间最基本的线性联系，即线性变换。它在自然语言处理、图像处理、物理学中的坐标变换、网络分析等多个领域都有广泛应用。

李良

矩阵的秩是什么？

小w

矩阵的秩是矩阵中线性无关行向量（或列向量）的最大数量，即行向量（列向量）空间的维数；也是矩阵阶梯型中非零行的数量；也是最大非零子式的阶数。可以通过高斯消元法将矩阵化为行阶梯形，非零行的数量即为秩。

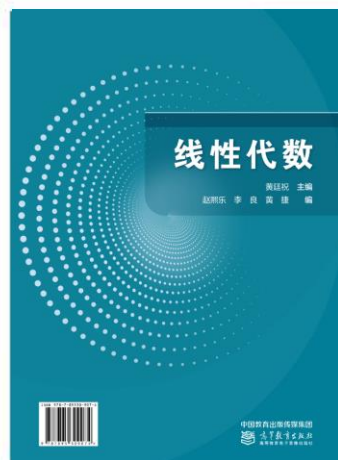
## 效果对比：专有大模型与多平台AI工具



# 交互式、个性化、课堂学习环境式的《线性代数数字教材》

主编并带领数学与信息交叉科研团队青年教授精心打造  
全新呈现方式，提供了超越纸质教材的可及性、互动性、个性化优质数字资源  
和专有大模型AI助教  
超越教材，犹如一个交互式、个性化的课堂学习环境

高等教育出版社第一部《线性代数数字教材》  
2024.11.14出版



线性代数数字教材

主编：黄廷祝

出版时间：2024年11月14日

ISBN：978-7-89530-907-4

¥68



手机阅读

数字人介绍数字教材



本数字教材由国家级教学名师主编并带领

魔珏有言

# 交互式、个性化、课堂学习环境式的《线性代数数字教材》

数字教材嵌入了高等教育出版社大模型平台训练的**专属AI助教**能够提供更加**个性化、高效率、互动性**的学习体验。



小v

我是线代智能助教小v，我们一起来探索线性代数的奥秘吧。

什么是线性代数？

线性空间是什么？

矩阵有什么用？



李良

how to determine if a matrix is positive definite?



小v

To determine if a matrix is positive definite, you can use the following methods:

Check if all eigenvalues of the matrix are positive. According to Definition 7.71, a symmetric matrix  $A$  is positive definite if all of its eigenvalues are positive [3].

Verify that  $x^T A x > 0$  for all nonzero vectors  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ . Theorem 7.74 states that a symmetric matrix  $A$  is positive definite if and only if  $x^T A x$  is positive for all nonzero vectors  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  [3].

Ensure the matrix is symmetric and has a positive determinant. Although a symmetric matrix with a positive determinant might not be positive definite, it is a necessary condition [1].

# 《线性代数数字教材》

数字教材融入了多维丰富的数字资源，包括**前沿视角**、**概念解析**、**典型例题精讲**、**前沿应用实例**、**习题**、**复习题**、**思考题**、**自测题**等多媒体资源。

## 1.0 引例

大数据时代, 形式千变万化的数据(文本、图像和视频等)爆发式增长. **如何简洁且统一地表示形式千变万化的数据是数据科学的基础问题之一**. 例如, 在图1.1中, 如何用数学语言表示灰度图像? 本章将要学习的**矩阵概念**可以帮助我们表示这个纷繁复杂的世界.

### 前沿视角: 矩阵与矩阵运算

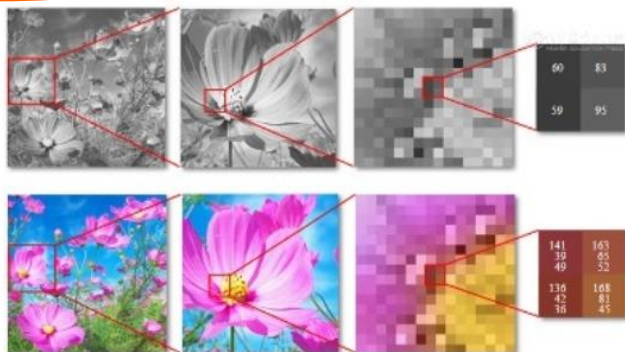


图1.1 矩阵表示数据

前言

第1章 矩阵及其初等变换

1.0 引例

1.1 矩阵及其运算

一、矩阵的概念

二、矩阵的线性运算

三、矩阵的乘法

四、矩阵的转置

习题1.1

1.2 高斯消元法与矩阵的初等变换

一、高斯消元法

二、矩阵的初等变换

三、初等矩阵

习题1.2

## 1.0 引例

大数据时代, 形式千变万化的数据(文本、图像和视频等)爆发式增长. **如何简洁且统一地表示形式千变万化的数据是数据科学的基础问题之一**. 例如, 在图1.1中, 如何用数学语言表示灰度图像? 本章将要学习的**矩阵概念**可以帮助我们表示这个纷繁复杂的世界.

### 前沿视角: 矩阵与矩阵运算

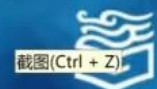
前沿视角之:

## 矩阵与矩阵运算

电子科技大学 黄廷祝

从例4还可见,  $A, B$ 都是非零矩阵, 但 $AB = O$ . 由此可知, 矩阵的乘法不满足消去律, 即当 $A \neq O$ 时, 由 $AB = AC$ 不能推出 $B = C$ . 事实上, 由 $AB - AC = A(B - C) = O$ 不能推出 $B - C = O$ .

### 典型例题精讲: 矩阵的运算



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

# 交互式、个性化、课堂学习环境式的《线性代数数字教材》

## 基于HTML5标准的可交互实例

线性代数数字教材

目录

前言

第1章 矩阵及其初等变换

1.0 引言

1.1 矩阵及其运算

一、矩阵的概念

二、矩阵的线性运算

三、矩阵的乘法

四、矩阵的转置

习题1.1

1.2 高斯消元法与矩阵的初等变换

一、高斯消元法

二、矩阵的初等变换

三、初等矩阵

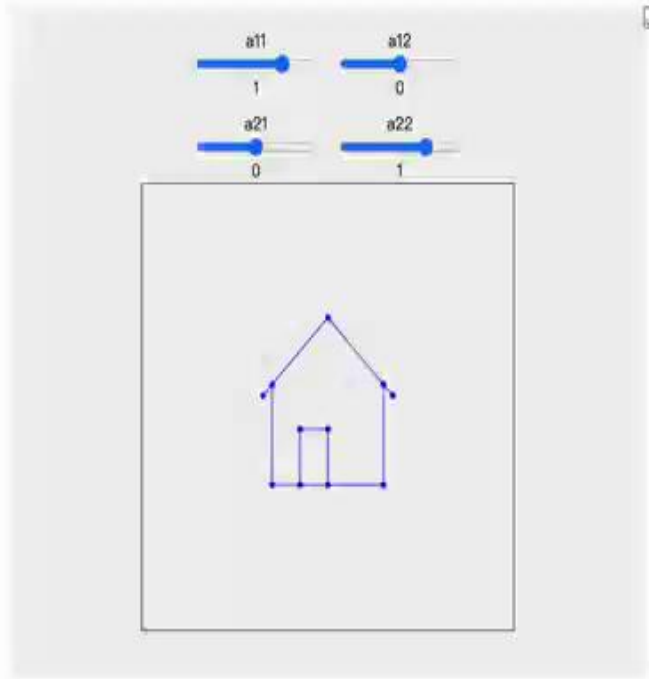
习题1.2

1.3 逆矩阵

一、逆矩阵的概念与性质

二、用行初等变换求逆矩阵

则变换后的点连接起来是什么形状呢?



### 应用实例一：颜色空间的转换

RGB颜色空间中 $3 \times 1$ 矩阵表示一种颜色, 其三个分量分别表示红、绿、蓝的值. YUV颜色空间中 $3 \times 1$ 矩阵表示一种颜色, 其三个分量分别表示明亮度Y及色度U和V的值. 在不同的应用场景下, 我们需要在不同的颜色空间之间转换. 如下矩阵乘积将RGB颜色空间的颜色变换到YUV颜色空间的颜色:

$$\begin{pmatrix} Y \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ -0.147 & -0.289 & 0.436 \\ 0.615 & -0.515 & -0.100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}.$$

而如下其逆矩阵的乘积将YUV颜色空间的颜色变换到RGB颜色空间的颜色:

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.140 \\ 1 & -0.395 & -0.581 \\ 1 & 2.032 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ U \\ V \end{pmatrix}.$$

下面我们展示一张图像及其对应的RGB分量图像和YUV分量图像(图 1.7).

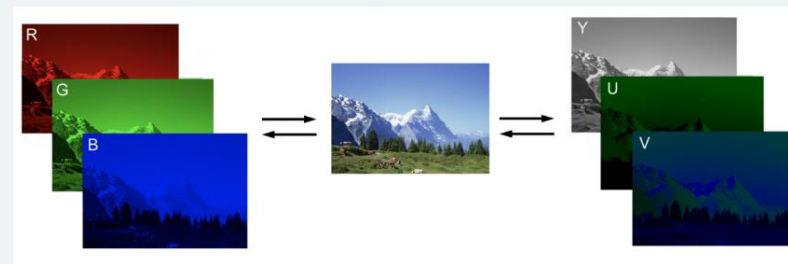
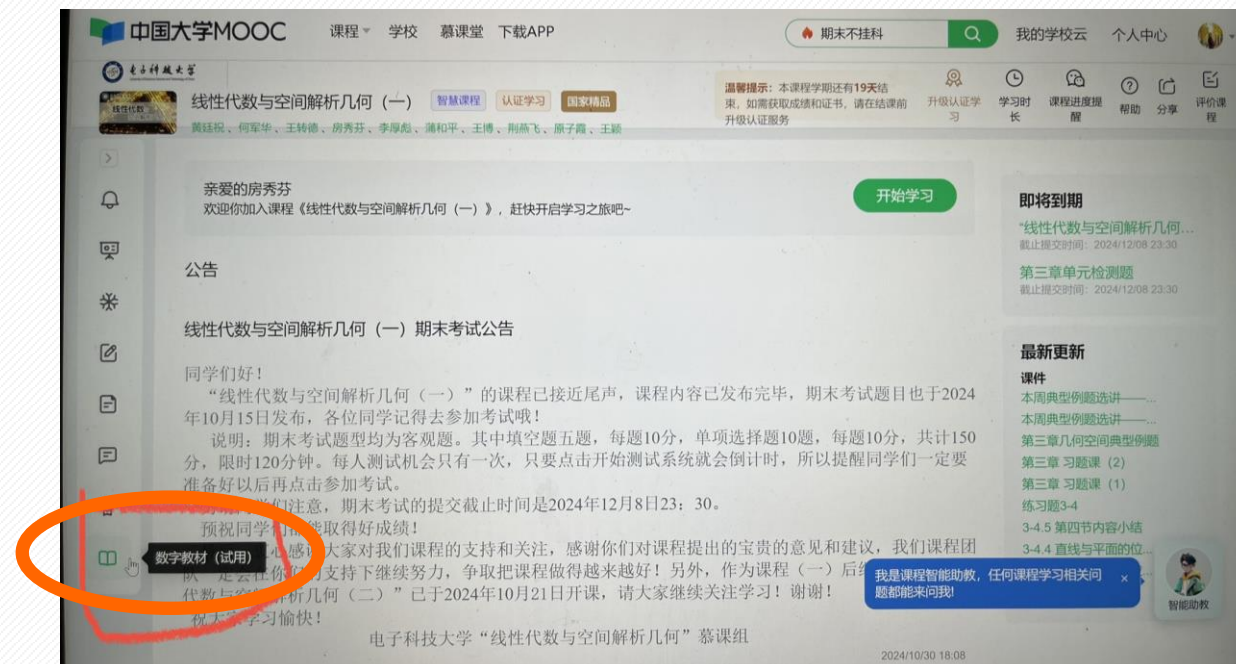


图 1.7

# AI课程平台 与 数字教材 互联、转换



谢谢！